

大学数学のアトリエ | 線形代数 第 6 章 固有値・固有ベクトル

No.5 ジョルダン標準形 (発展)

この回のゴール

- ジョルダン細胞・ジョルダン標準形とは何かを説明できる.
- 対角化できない 2 次正方行列のジョルダン標準形と変換行列 P を求められる.
- 3 次正方行列について, 固有空間の次元からジョルダン標準形を決定できる.
- ジョルダン標準形を使って A^n や連立微分方程式を計算できる.

この回は発展

ジョルダン標準形の一般的な存在証明はかなり長いので, このプリントでは定理を紹介するにとどめ, 2 次・3 次の場合に具体的に求める方法を中心に扱う.

■ 1. 対角化できない行列

No.3 例題 3 で, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ は固有値が 3 だけで固有空間が 1 次元なので, 対角化できなかった. 固有ベクトルが足りないとき, どこまで簡単な形にできるだろうか.

定義 1 ジョルダン細胞・ジョルダン標準形

λ を実数とする. 対角成分がすべて λ , そのすぐ上の成分がすべて 1, それ以外が 0 の k 次正方行列

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \left(\text{例: } J_1(\lambda) = (\lambda), J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

をジョルダン細胞という. ジョルダン細胞を対角線上に並べた行列 (それ以外は 0)

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

をジョルダン標準形という.

対角行列は, すべての細胞が 1×1 ($J_1(\lambda)$) であるジョルダン標準形である.

定理 1 ジョルダン標準形の存在と一意性

n 次正方行列 A の固有多項式が実数の範囲で 1 次式の積に分解するならば, 正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP$ はジョルダン標準形になる. しかも, そのジョルダン標準形は, 細胞の並べ方を除いてただ 1 つに決まる.

(固有値を複素数まで考えれば, 固有多項式はいつも 1 次式の積に分解するので, どんな正方行列もジョルダン標準形にできる.)

■ 2. 2 次正方行列の場合

2 次実正方行列 A の固有多項式が実数の範囲で 1 次式の積に分解する場合、対角化できないのは、固有値が 1 つ (a とする, 2 重根) で $A \neq aE$ のときである (No.3 練習問題 5). (90° 回転 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のように実数の固有値をもたない行列も、実数の範囲では対角化できないが、ここでは扱わない.)

定理 2

2 次正方行列 A の固有多項式が $(\lambda - a)^2$ で、 $A \neq aE$ とする. $N = A - aE$ とおく. $Nv_2 \neq \mathbf{0}$ となるベクトル v_2 を 1 つ選び, $v_1 = Nv_2$ とする. $P = (v_1 \ v_2)$ とすると P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = J_2(a).$$

【証明】 ケイリー・ハミルトンの定理 (No.2 定理 5) より $N^2 = (A - aE)^2 = O$. よって $Nv_1 = N^2v_2 = \mathbf{0}$, つまり

$$Av_1 = av_1, \quad Av_2 = av_2 + Nv_2 = v_1 + av_2.$$

$v_1 \neq \mathbf{0}$ は固有ベクトル. v_2 は固有ベクトルでない ($Nv_2 \neq \mathbf{0}$) ので v_1 の定数倍でなく, v_1, v_2 は 1 次独立. 上の 2 式を並べると $AP = P \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となり, 結論を得る. $\square$

注意

- v_2 は固有ベクトルでないベクトルなら何でもよい. たとえば e_1 か e_2 のどちらかは必ず使える.
- v_2 は $N^2v_2 = \mathbf{0}$ を満たす. このようなベクトルを一般固有ベクトルという.
- P の列の順番は「固有ベクトル v_1 , 一般固有ベクトル v_2 」の順. 逆にすると 1 が左下に来る.

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形と, 変換行列 P を求めよ.

【解答】 固有値は 3 (2 重根). $N = A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $v_2 = e_1 = {}^t(1, 0)$ とすると $v_1 = Ne_1 = {}^t(-1, -1) \neq \mathbf{0}$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

確認: $AP = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$

コラム: ジョルダン細胞は何をしているか

$J_2(a)$ は, v_1 方向には単に a 倍し, v_2 方向には「 a 倍してから v_1 方向に 1 だけずらす」変換である. $J_2(a) = aE + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と, 「伸縮」と「ずらし (せん断)」の和に分かれている. 対角化できない行列には, この「ずらし」の成分がどうしても残る.

■ 3. ジョルダン細胞の n 乗

定理 3

$$J_2(a)^n = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

【証明】 $J_2(a) = aE + N_0$, $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $N_0^2 = O$. aE と N_0 は可換なので二項定理が使えて, N_0^2 以降の項は消える: $J_2(a)^n = (aE)^n + n(aE)^{n-1}N_0 = a^n E + na^{n-1}N_0$. (第 1 章 No.2 練習問題 6 で $a = 2$ の場合を帰納法で示した.) $\square$

例題 2

例題 1 の A について, A^n を求めよ.

【解答】 $A = PJ_2(3)P^{-1}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ なので

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3-n & n \\ -n & 3+n \end{pmatrix}.$$

($n = 1$ で A に戻る.)

注意

対角化できる場合は A^n の成分が λ^n の組合せだったが, ジョルダン細胞があると $n\lambda^{n-1}$ のような n をかけた項が現れる.

■ 4. 3 次正方行列の場合

固有値 λ に対応するジョルダン細胞について, 次のことが知られている.

- 細胞のサイズの合計 = λ の代数的重複度.
- 細胞の個数 = λ の幾何的重複度 (= $\dim W(\lambda)$).

3 次以下の行列では, この 2 つの情報だけでジョルダン標準形が決まる. たとえば固有値 λ の代数的重複度が 3 のとき,

$$\dim W(\lambda) = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \dim W(\lambda) = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \dim W(\lambda) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(4 次以上では細胞の個数だけでは決まらないことがあり, $\text{rank}(A - \lambda E)^k$ を調べる必要がある.)

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形と, 変換行列 P を求めよ.

【解答】 第 3 列で展開すると $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

$\lambda = 1: A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ のランクは 2 なので $\dim W(1) = 1$. 代数的重複度 2, 細胞 1 個なの

で $J_2(1)$. 固有値 2 は単根で $J_1(2)$. よってジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

P を作る. $W(1)$ は $-x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0$ より $\mathbf{p}_1 = {}^t(1, 1, 0)$. 次に $(A - E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ を満たす $\mathbf{p}_2$ を探す: $-x_1 + x_2 = 1, x_1 - x_2 + x_3 = 0$ より, たとえば $\mathbf{p}_2 = {}^t(0, 1, 1)$. $W(2)$ は $A - 2E$ を解いて $\mathbf{p}_3 = {}^t(0, 0, 1)$.

$$P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意

例題 3 では, 定理 2 の「 $\mathbf{v}_2$ を選んでから $\mathbf{v}_1 = N\mathbf{v}_2$ 」とは逆に, 「固有ベクトル $\mathbf{p}_1$ を先に選び, $(A - E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ を解く」方法をとった. どちらでもよいが, 後者では $\mathbf{p}_1$ の選び方によっては方程式が解をもたないことがあるので注意. たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で固有ベクトル $\mathbf{p}_1 = {}^t(0, 0, 1)$ を選ぶと, $(A - E)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ は解をもたない. $AP = PJ$ を確かめれば検算になる.

■ 5. 微分方程式への応用

例題 4

連立微分方程式 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ の一般解を求めよ.

【解答】 係数行列は例題 1 の A . $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} = {}^t(u, v)$) とおくと $\mathbf{u}' = J_2(3)\mathbf{u}$, つまり

$$u' = 3u + v, \quad v' = 3v.$$

第 2 式から $v = C_2 e^{3t}$. 第 1 式は $u' - 3u = C_2 e^{3t}$ で, $u = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$ が解になる (代入して確かめられる). よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (C_1 + C_2 t)e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

コラム: $te^{\lambda t}$ の正体

2 階の微分方程式 $y'' + py' + qy = 0$ で, 特性方程式が重解 λ をもつとき, 解に $te^{\lambda t}$ が現れることを学ぶ (分野「微分方程式」第 3 章 No.1). これは, 対応する行列が対角化できず, ジョルダン細胞 $J_2(\lambda)$ をもつことの現れである. A^n に $n\lambda^{n-1}$ が現れたのと同じ理由である.

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形と変換行列 P を求めよ.
2. 練習問題 1 の A について A^n を求めよ.
3. 次の行列のジョルダン標準形を求めよ (P は求めなくてよい).

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 連立微分方程式 $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ の一般解を求めよ.
5. (考えてみよう) 2 次正方行列 A の固有多項式が $(\lambda - a)^2$ のとき, $N = A - aE$ とおくと $N^2 = O$ である. $A = aE + N$ と二項定理を使って, P を求めずに $A^n = a^n E + na^{n-1}N$ を示せ. また, これを例題 1 の A に使って例題 2 の結果を確かめよ.

■ 練習問題の解答

1. $\varphi_A = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. $N = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. $v_2 = e_1$ として $v_1 = Ne_1 = {}^t(1, -1)$.
 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. 練習問題 5 の方法で: $A^n = 2^n E + n2^{n-1}N = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2+n & n \\ -n & 2-n \end{pmatrix}$.
3. (1) 下三角行列で固有値は 2 (3 重). $A - 2E$ のランクは 1 なので $\dim W(2) = 2$. 細胞 2 個で $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2) 固有値 2 (3 重), $A - 2E$ のランク 2 より $\dim W(2) = 1$. 細胞 1 個で, すでにジョルダン標準形 $J_3(2)$. (3) No.3 例題 2 で対角化できたので, ジョルダン標準形は $\text{diag}(4, 1, 1)$.
4. 練習問題 1 の P で $x = Pu$ とおくと $u' = 2u + v$, $v' = 2v$. $v = C_2 e^{2t}$, $u = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (C_1 + C_2 t)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. $N^2 = O$ はケイリー・ハミルトンの定理から. aE と N は可換なので二項定理が使え, N^2 を含む項は消えて $A^n = (aE + N)^n = a^n E + na^{n-1}N$. 例題 1 では $a = 3$, $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で

$$A^n = 3^n E + n3^{n-1}N = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3-n & n \\ -n & 3+n \end{pmatrix}.$$